Aula 12

Centro de massa e Momento linear II

Sumário

Impulso

Colisões

- Momento linear e energia cinética em colisões
- Colisões inelásticas a uma dimensão
- Colisões elásticas a uma dimensão
- Colisões em duas dimensões

Colisão e Impulso

O momento linear de uma partícula só varia se uma força resultante não nula actuar sobre ela.

Vamos considerar a colisão de um bastão com uma bola.

A força é:

- muita intensa;
- actua durante um intervalo de tempo muito pequeno e;
- muda repentinamente o momento linear da bola.

Colisão e Impulso

A bola é actuada por uma força que é suficientemente intensa para provocar a diminuição do módulo da velocidade da bola, pará-la ou fazer com que inverta o sentido do movimento;

A partir da expressão: $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

concluímos que no intervalo de tempo: dt

a variação do momento linear da bola é:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

Colisão e Impulso

A variação do momento linear da bola no intervalo de tempo, $\Delta t = t_f - t_i$, em que a força do bastão actuou é, então,

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\ t\ \ dt = \vec{J}$$

Ou seja, a variação do momento linear é igual ao *impulso da força* que actua na bola na colisão:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\ t\ \ dt$$

Colisão e Impulso

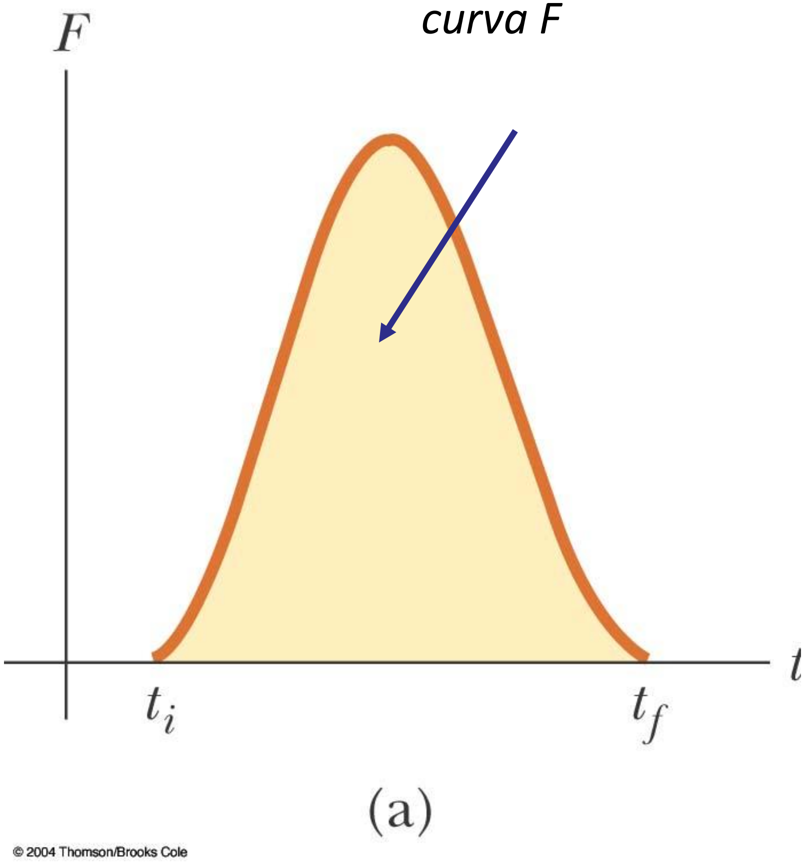
Podemos escrever na forma vectorial $\Delta\vec{p} = \vec{J}$

ou escalar, em termos das componentes,

$$\Delta p_x = J_x$$

$$p_{f_x} - p_{i_x} = \int_{t_i}^{t_f} F_x \; t \;\; dt$$

J é a área circundada pela curva F



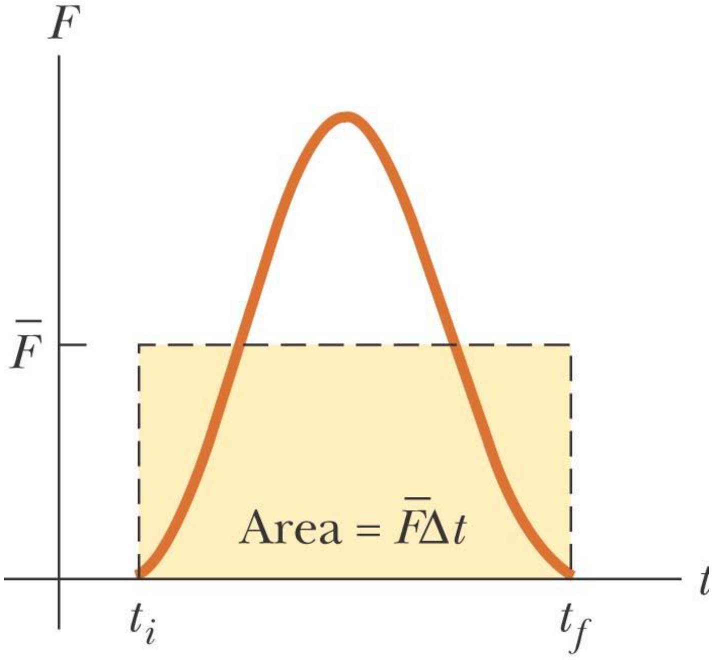
Colisão e Impulso

Em muitas casos não conhecemos a forma da curva *F*(*t*), mas conhecemos o valor da força média que actua no intervalo de tempo Δ*t;*

Então: $$J = \bar{F}\Delta t$$

As dimensões do Impulso são:

M L T^{-1}



(b)

Teorema do Impulso e do Momento Linear

O impulso da força resultante, $\vec{F}$, que actua numa partícula num determinado intervalo de tempo é igual à variação do momento linear da partícula nesse intervalo de tempo;

Esta lei é equivalente à Segunda Lei de Newton.

Aproximação de Impulso

- Em muitos casos, uma determinada força que actua numa partícula é muito superior em módulo à das outras forças que actuam na partícula;
- Esta aproximação é denominada *aproximação de impulso*. A força é a força impulsiva;
- Um exemplo é uma colisão entre duas partículas;
  - Durante o pequeno intervalo de tempo em que colidem as forças entre as partículas são, frequentemente, de módulo muito maior do que as restantes
- $\vec{p}_f$ e $\vec{p}_i$ representam os momentos lineares da partícula imediatamente antes e depois da colisão;
- Supomos que as partículas *não se movem* durante a colisão.

Aproximação de Impulso :

Exemplo – Colisão de um carro com uma parede

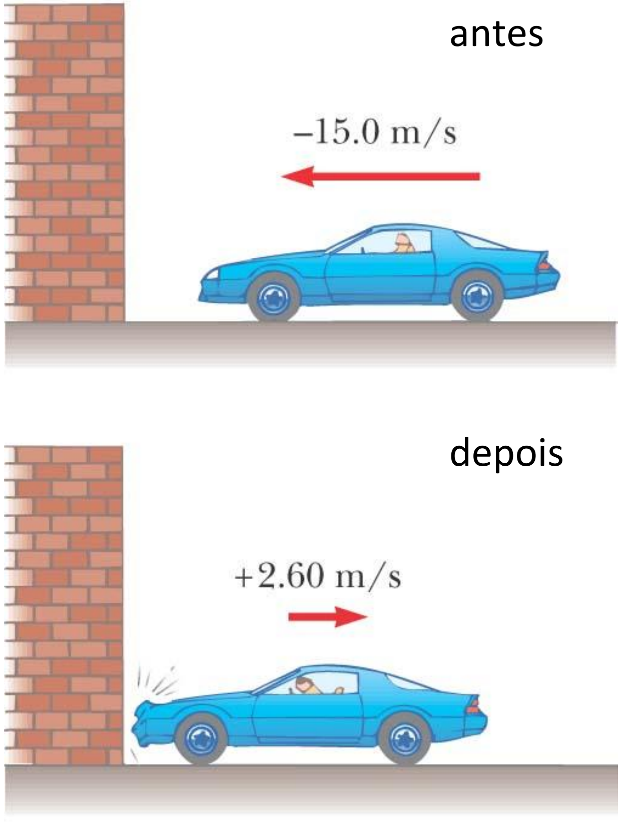
Os momentos lineares antes e depois da colisão entre o carro e a parede podem ser calculados

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Obtemos o impulso:

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

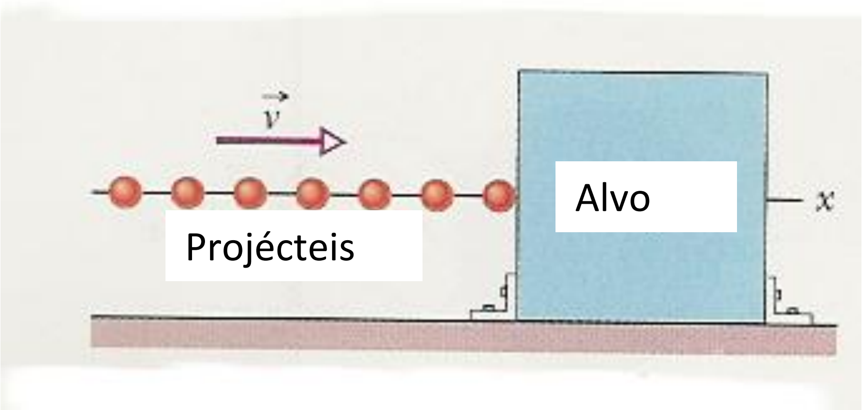
$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$



(a)

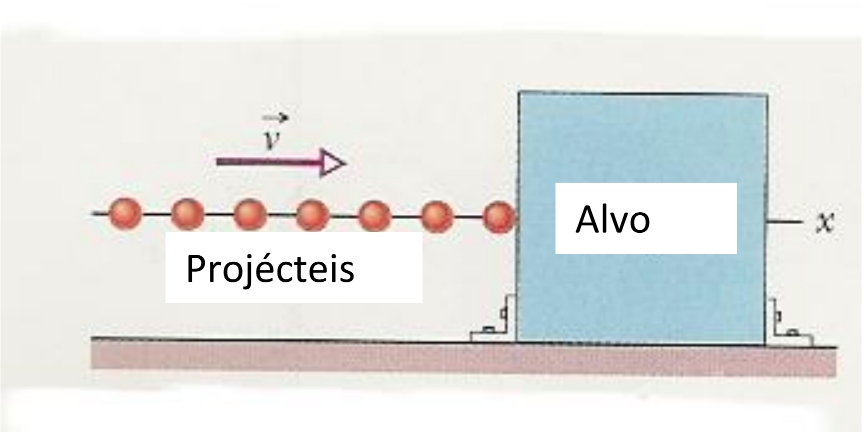
Séries de colisões

- Vamos considerar a força que actua num corpo que sofre um conjunto de colisões sucessivas;
- Estamos interessados em obter a força média que actua no alvo durante o bombardeamento;
- Δp é a variação do momento linear do projéctil numa colisão;
- O impulso resultante no alvo, após *n* colisões é:



$$J = -n\Delta p$$

Séries de colisões



- A força média exercida sobre o alvo durante o bombardeamento é

$$\bar{F} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m \Delta v$$

- Como no intervalo Δt a massa total de projéctil que colide com o alvo é:

$$\Delta m = nm$$

$$\bar{F} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v$$

- A variação da velocidade do projéctil é: $$\Delta v = v_f - v_i$$

- Se pára após o choque:

$$\Delta v = 0 - v = -v$$

- Se faz ricochete e mantém o módulo da velocidade:

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v$$

Colisões – Características

- Utilizamos o termo **colisão** para definir um acontecimento em que duas partículas se aproximam uma da outra e interactuam por meio de forças;

- Supomos que o intervalo de tempo em que as respectivas velocidades variam de um valor inicial para um valor final é muito curto (na prática, consideramos que as colisões são *instantâneas*);

- A força de interacção é dominante, em relação às restantes forças que possam estar presentes;

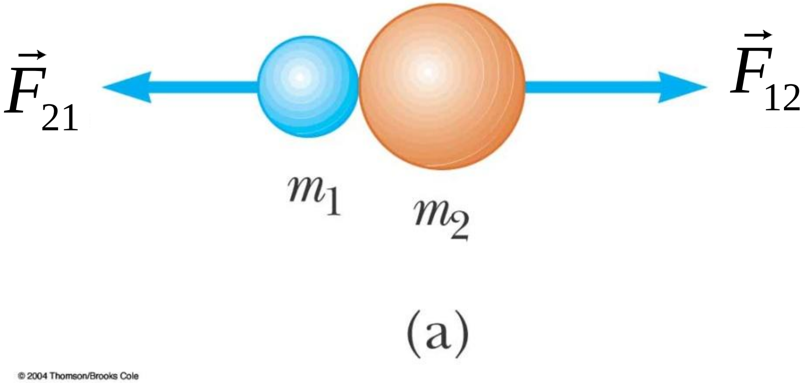
  - Podemos utilizar, portanto, a aproximação do impulso

Colisões – Exemplo 1

As colisões podem resultar de contacto directo;

A forma com as forças mútuas variam pode ser complicada;

As forças são internas ao sistema



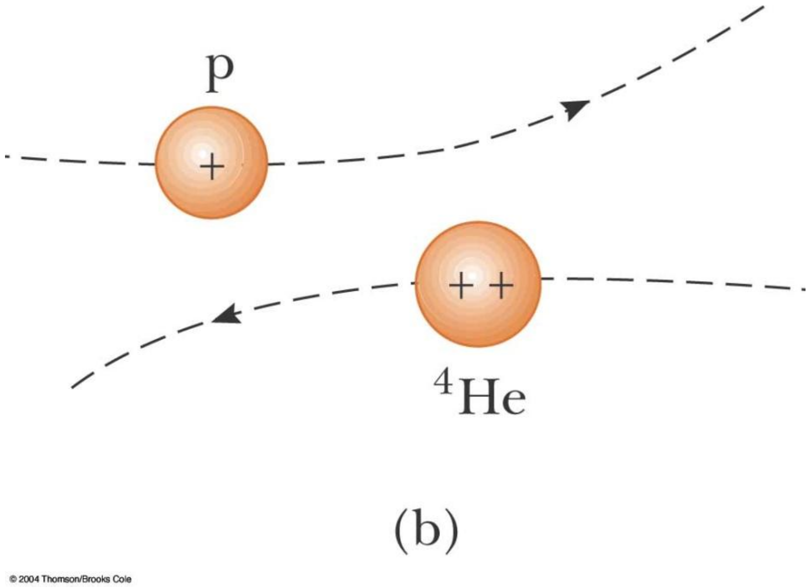
O momento linear total conserva-se.

Colisões – Exemplo 2

A colisão nem sempre envolve contacto físico entre os corpos;

Apesar disso, existem sempre forças de interacção entre os corpos;

Este tipo de colisão é analisado exactamente da mesma forma que aqueles que incluem contacto físico.



Tipos de Colisões

Numa colisão, o **momento linear total** do sistema conserva-se **sempre**;

Numa colisão ***elástica***, a energia cinética total do sistema também se conserva;

Colisões perfeitamente elásticas só ocorrem a nível microscópico;

Em colisões macroscópicas, só podem ocorrer colisões aproximadamente elásticas;

Numa colisão ***inelástica* ou *não elástica***, a energia cinética total do sistema não conserva;

Se, após a colisão os corpos se deslocam solidariamente, dizemos que a colisão é ***completamente não elástica***.

Colisões

Numa colisão não elástica, perde-se alguma energia cinética (é transformada noutra forma de energia), mas os corpos não se deslocam solidariamente após a colisão;

Colisões elásticas e completamente não elásticas são casos limite, a maior parte das colisões situa-se entre estas;

O momento linear total do sistema conserva-se sempre numa colisão.

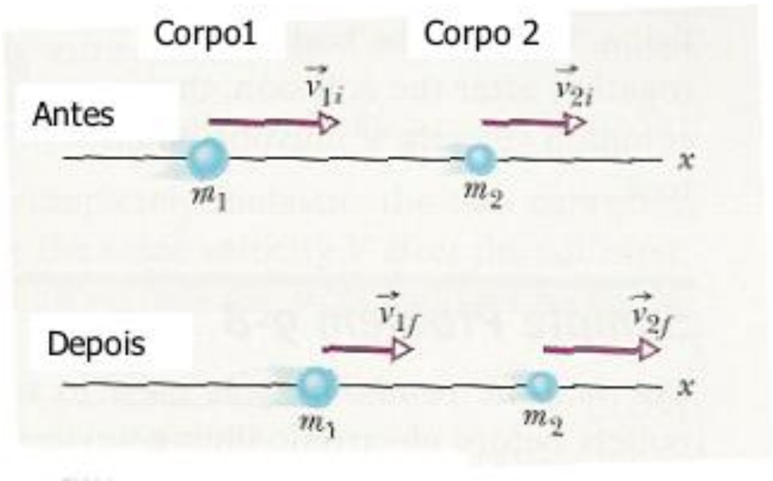
Colisões a uma dimensão

O momento linear total do sistema *antes* da colisão é igual ao momento linear total do sistema *depois* da colisão

ou

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

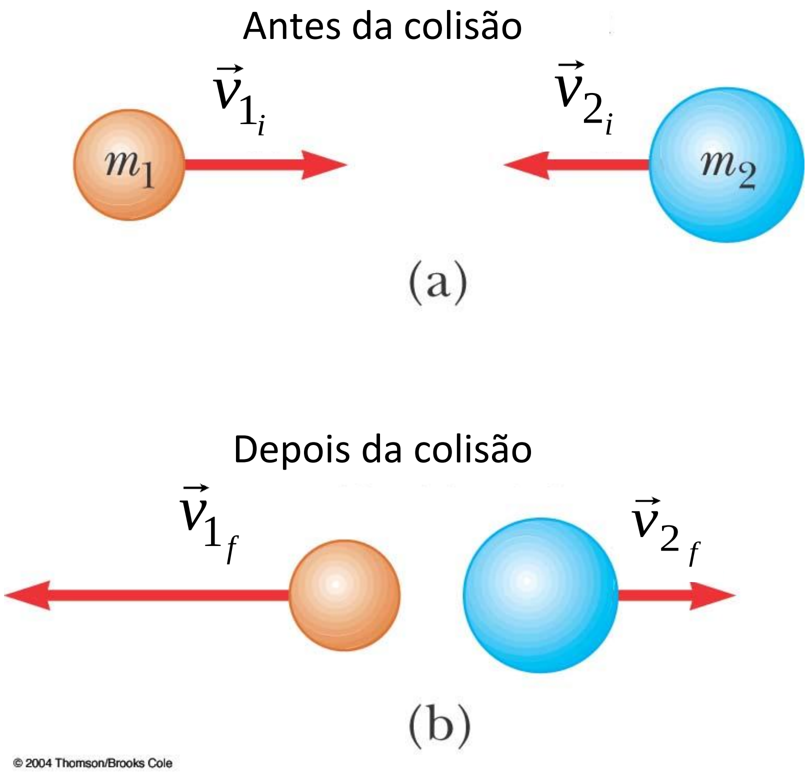


Numa dimensão:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Colisões Elásticas

Conservam-se o momento linear total e a energia cinética total



$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1\vec{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_{2f}^2$$

Colisões Elásticas Unidimensionais

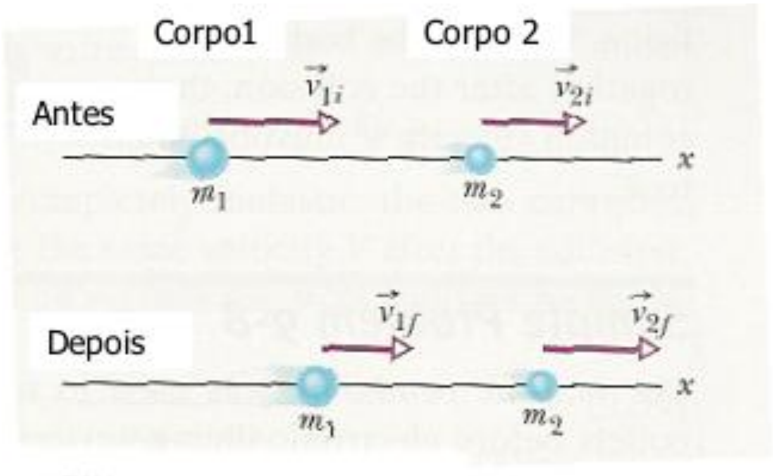
Caso geral

v_{1i} $\rightarrow$ velocidade da partícula 1 imediatamente antes da colisão

v_{2i} $\rightarrow$ velocidade da partícula 2 imediatamente antes da colisão

v_{1f} $\rightarrow$ velocidade da partícula 1 imediatamente depois da colisão

v_{2f} $\rightarrow$ velocidade da partícula 2 imediatamente depois da colisão



Conservação do momento linear:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Conservação da energia cinética:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Colisões Elásticas Unidimensionais

Caso geral

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 \;\; v_{1i} - v_{1f} \;\; = -m_2 \;\; v_{2i} - v_{2f} \qquad m_1 \;\; v_{1i}^2 - v_{1f}^2 \;\; = m_2 \;\; v_{2f}^2 - v_{2i}^2$$

$$m_1 \;\; v_{1i} - v_{1f} \quad v_{1i} + v_{1f} \;\; = -m_2 \;\; v_{2i} - v_{2f} \quad v_{2i} + v_{2f}$$

Dividindo as duas equações membro a membro:

$$v_{1i} + v_{1f} \;\; = - \;\; v_{2i} + v_{2f}$$

Colisões Elásticas Unidimensionais

Utilizando

$$m_1 \;\; v_{1i} - v_{1f} \;\; = -m_2 \;\; v_{2i} - v_{2f} \qquad \text{e} \qquad v_{1i} + v_{1f} \;\; = - \;\; v_{2i} + v_{2f}$$

obtemos

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Colisões Elásticas Unidimensionais

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Casos particulares

Massas iguais

$$m_1 = m_2 = m$$

Verifica-se

$$v_{1f} = v_{2i}$$

E também

$$v_{2f} = v_{1i}$$

o módulo da

$$v_{2f} - v_{1f} = -\left(v_{2i} - v_{1i} \right)$$

Colisões Elásticas Unidimensionais

Casos particulares

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Um corpo estacionário (corpo 2) $v_{2i} = 0$

Conservação do momento linear $m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$

Conservação da energia cinética $\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Colisões Elásticas Unidimensionais

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Casos particulares

- Suponhamos $m_1 \neq m_2$

obtemos, se v_{2i}=0

$$v_{1f} = \frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_{1i}$$

se $m_1 << m_2$

$$v_{1f} \cong -v_{1i}$$

$$v_{2f} \cong v_{2i} = 0$$

Colisões Elásticas Unidimensionais

Casos particulares

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

- Suponhamos agora $m_2 << m_1$

obtemos, se v_{2i}=0

$$v_{1f} = \frac{1 - \dfrac{m_2}{m_1}}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} v_{1i}$$

e

$$v_{1f} \cong v_{1i}$$

$$v_{2f} \cong 2v_{1i}$$

Colisões Elásticas

Resumo de casos especiais

$m_1 = m_2 \Rightarrow$ as partículas "trocam" as velocidades

Quando uma partícula muito leve colide frontalmente com uma partícula muito maciça, inicialmente em repouso, a velocidade da partícula leve inverte-se e a outra partícula mantém-se aproximadamente em repouso;

Quando uma partícula com massa muito elevada colide frontalmente com uma partícula que está inicialmente em repouso, a partícula mais maciça continua o seu movimento sem alteração da velocidade, e a partícula mais leve *passa a deslocar-se* com velocidade de módulo igual ao dobro do módulo da velocidade inicial da outra partícula.

Velocidade do Centro de Massa

Vimos atrás que se a resultante das forças exteriores que actua num corpo é nula, então a aceleração do centro de massa é nula:

$$M\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{F}_{\mathrm{res}}^{\ \mathrm{ext}}$$

Daqui resulta que quando temos dois corpos que colidem, a velocidade do centro de massa do sistema constituído por esses dois corpos é a mesma antes e depois da colisão:

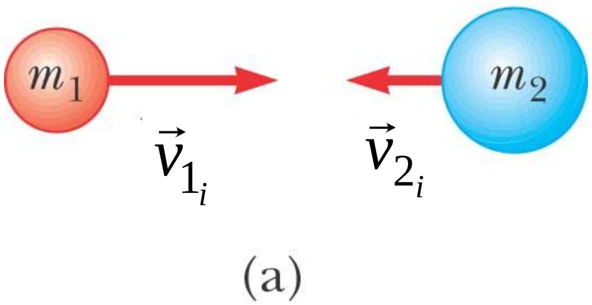
$$\vec{v}_{\mathrm{CM}_i} = \vec{v}_{\mathrm{CM}_f}$$

Colisões Completamente não Elásticas a uma dimensão

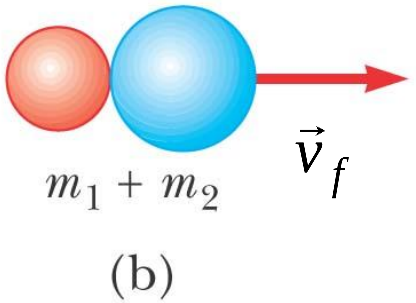
Como os corpos se movem solidariamente (colados) após a colisão:

$$m_1 v_{1_i} + m_2 v_{2_i} = \;\; m_1 + m_2 \;\; v_f$$

Antes da colisão



Depois da colisão



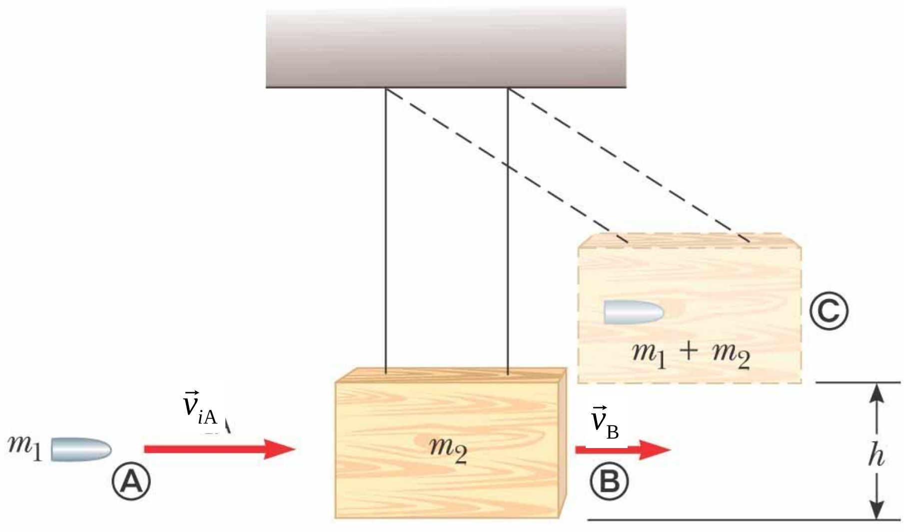
Exemplo – Pêndulo Balístico

A colisão é completamente inelástica – a bala fica imersa no bloco de madeira;

A equação do momento tem duas incógnitas;

Utiliza-se a conservação da energia do pêndulo para calcular a velocidade imediatamente após a colisão;

Podemos então obter a velocidade da bala.



(a)

Exemplo – Pêndulo Balístico

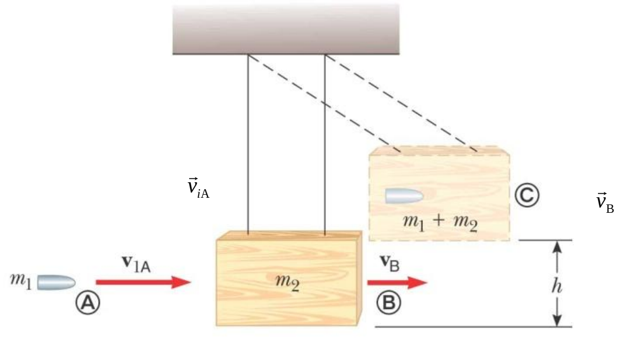
Concluímos

$$mv = \; M + m \; V$$

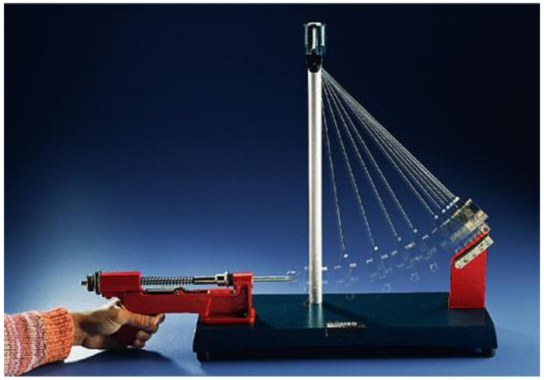
$$\frac{1}{2} \; M + m \; V^2 = \; M + m \; gh$$

$$\frac{1}{2} \frac{m^2}{M + m} v^2 = \; M + m \; gh$$

$$v = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$$



(a)



(b)

Colisões em Duas Dimensões

Conservam-se todas as componentes do momento linear (x, y e z);

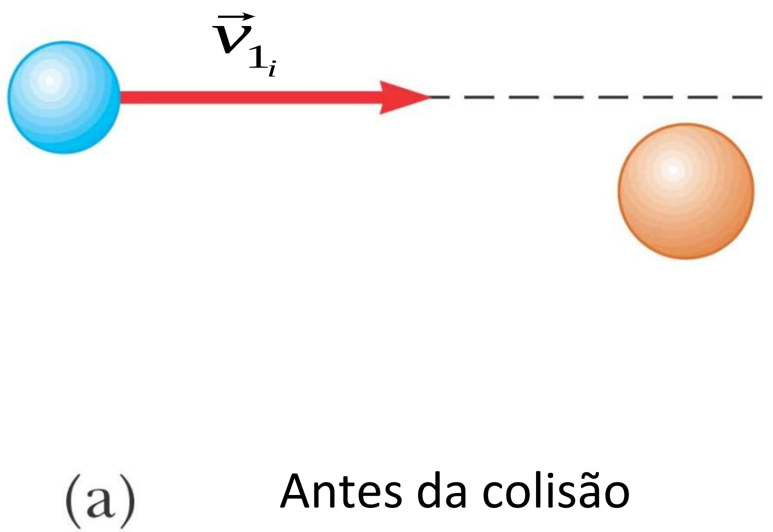
Se a colisão é elástica, usamos a conservação da energia como segunda equação, mas agora temos de incluir todas as componentes da velocidade.

Colisões em Duas Dimensões - exemplo

A partícula 1 move-se com velocidade $\vec{v}_{1_i}$ e a partícula 2 está em repouso;

A componente do momento linear total inicial segundo o eixo dos *x*, é $m_1 v_{1_i}$

A componente do momento linear total inicial segundo o eixo dos *y*, é 0.



Antes da colisão

Colisões em Duas Dimensões - exemplo

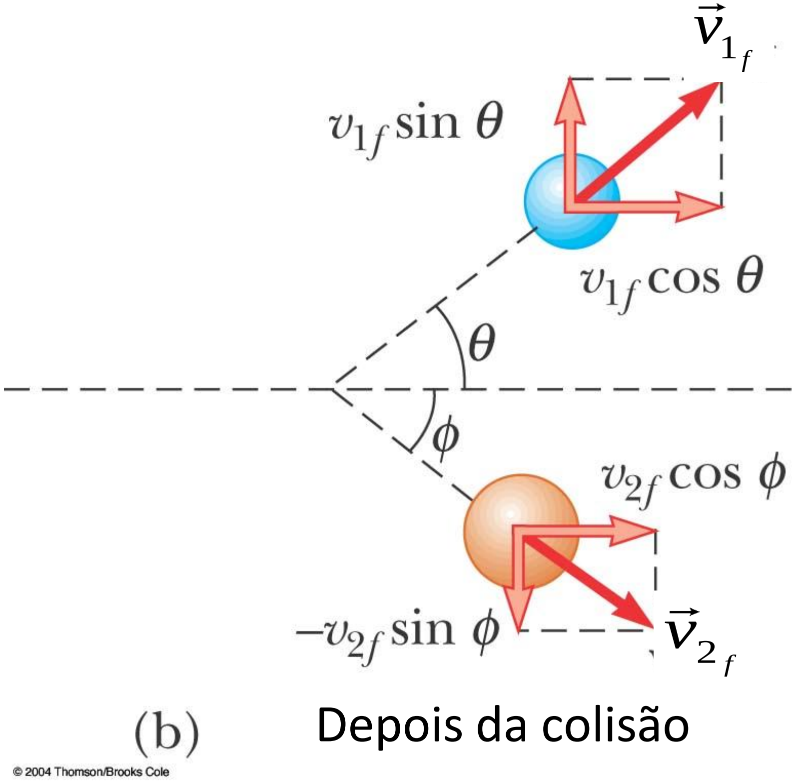
Imediatamente depois da colisão:

a componente do momento linear total segundo o eixo dos *x* é:

$$m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$

a componente do momento linear total segundo o eixo dos *y* é:

$$m_1 v_{1f} \sin\theta \text{ - } m_2 v_{2f} \sin\phi$$



Depois da colisão

Colisões em Duas Dimensões - exemplo

Antes da colisão, o momento linear do automóvel tem a direcção e sentido do eixo dos *x* e o da carrinha tem a direcção e sentido do eixo dos *y*;

Após a colisão, ambos têm componentes segundo *x* e segundo *y*.